جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤-٢٠١٥
أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة ونصف
العلامة: (١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (٢٠ درجة):

أ)- اذا كان g , f تابعان عقديان وكمولان حسب ستيلجس بالنسبة للدالة المتزايدة h على $[a,b]$ ومن أجل $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ عندئذ أثبت أن :

$$\int_a^b |f(x).g(x)|dh(x) \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dh(x)\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dh(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

ب)- أثبت أن كل فضاء خطي منظم منتهي البعد هو فضاء باناخ . ومتى الفضاء التبولوجي الخطي قابل للتنظيم

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

أ)- أثبت أن الفضاء ℓ_p حيث $(p \neq 2)$ ليس فضاء هيلبرت ، وهل هو فضاء باناخ (بدون اثبات).

ب)- في الفضاء $L_2[-\pi,\pi]$ تشكل العناصر :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots\ldots$$

جملة متعامدة نظامية ، والمطلوب بيّن أن الجملة تامة وأن متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ من الفضاء $L_2[-\pi,\pi]$

لها الشكل : $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ، وما هي صيغة مساواة بارسيفال عندئذ ؟

السؤال الثالث (٢٠ درجة):

أ)- اوضح أن كل من المجالين $]0,1[$ و $]0,\infty[$ هوميومورفيان فيما بينهما مع التطبيق $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

ب)- ليكن لدينا الفضاء الخطي المنظم E ، بيّن أنه يكفي كي يكون هذا الفضاء تاماً هو أن تكون كل متسلسلة متقاربة مطلقاً فيه متقاربة.

السؤال الرابع (١٥ درجة):

ليكن لدينا المؤثر : $A:C[0,\infty[\to C[0,\infty[$ المعرف بالشكل $Ax(t)=t\,x(t)$

أثبت أنّ المؤثر A خطي وغير محدود و لكنّه مغلق .

السؤال الخامس (١٠+١٥= ٢٥ درجة):

١- ليكن E فضاء خطياً منظماً .عرف الفضاء المرافق E^* ثم أثبت أن E^* فضاء تاماً .

٢- أوجد الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ إذا أخذنا النظيم في $\mathbb{R}^n$ من الشكل:

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

جامعة البعث　　امتحانات الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤-٢٠١٥　　المدة : ساعة و نصف
كلية العلوم　　سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)　　العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات　　لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

جواب السؤال الأول (٢٠ درجة):

أ)- كي يكون الفضاء (s,d) خطيا علينا بيان أن المسافة لا متغيرة الانسحاب لأن

$$|x_k - y_k| = |x_k + z_k - y_k - z_k| = |x_k + z_k - (y_k + z_k)|$$

سنثبت أن (s,d) فضاء متري خطي :

حتى يكون (s,d) فضاءً مترياً خطياً يجب أن تكون d مع العملية الجمعية وعملية الجداء بعدد مستمرتين في (s,d).

شرط استمرارية الخاصة الجمعية : ليكن $x,y,a,b \in S$ سنثبت أن $d(x+y,a+b) < \varepsilon$ علماً أن $d(x,a)+d(y,b)<\delta$ لذلك سنثبت أن $d(x+y,a+b) \le d(x,a)+d(y,b)$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k+y_k-(a+b)|}{1+|x_k+y_k-(a+b)|} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{|x_k-a|}{1+|x_k-a|}+\frac{|y_k-b|}{1+|y_k-b|}\right)$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-a|}{1+|x_k-a|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|y_k-b|}{1+|y_k-b|}$$
$$\le d(x,a)+d(y,b)$$

وبذلك نحصل على استمرار الخاصة الجمعية .

شرط استمرار الجداء بعدد : لتكن $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0$ و $d(x_n,a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ سنثبت أن :

$$d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

بفرض أن : $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0$ و $d(x_n,a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. من الواضح بسهولة أن :

$$d(x_n,a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow d\left(x_n^{(k)},a^k\right) < \varepsilon$$

من أجل k عدد طبيعي من N: $d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a) < \varepsilon$ ، لنأخذ المتتالية :

$$\left.\begin{array}{l} x_n^1 \to a^1 \\ x_n^2 \to a^2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n^k \to a^k \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n \to a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_n^{(k)} \to a^{(k)} \\ \lambda_n x_n^{(k)} \to \lambda_0 a^{(k)} \\ \Updownarrow \\ \lambda_n x_n \to \lambda_0 a \end{array}$$

16

يدعى هذا النوع من التقارب بـ التقارب بالإحداثي .
وبالتالي فإنّ $d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ومنه استمرارية خاصّة الضرب بعدد وبالتالي الفضاء المتري (S,d) خطّي .

فضاء خطي منظم ام لا :

من أجل العدد λ والعنصر $\xi=\{\xi_n\}$ من s يكون لدينا:

$$\|\lambda\xi\|_s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\lambda\xi_n|}{1+|\lambda||\xi_n|}\neq|\lambda|.\|\xi\|_s$$

إذن أحد شروط النظيم غير محقق وبالتالي (s,d) ليس فضاءً منظماً. رغم أنه خطيا فلا يمكن أن يكون باناخياً .

ب)- تعريف المنظّم الكلّي :

لنأخذ الفضاء المتري الخطي (X,d) ولنعرف التابع $g(x)$: $g(x)=d(x,\theta)$

حيث θ صفر الفضاء X.

عندئذٍ فإن g يحقق الشروط الآتية :

1) $g:X\to\mathbb{R}$

2) $g(x)=0\Leftrightarrow x=\theta$

3) $g(x)=g(-x)\ ;\forall x\in X$

4) $g(x+y)\le g(x)+g(y)$

5) إذا كانت $\lambda_0,\lambda_n\in\mathbb{C}$ و $a,x_n\in X$ بحيث إن :
$x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a \wedge \lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda_0$ عندئذٍ يكون $g(x_n-a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
وإذا كانت $\lambda_n x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda_0 a$ يكون $g(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

حساب المسافة في $BV[0,1]$: تعطى بالشكل(للدالتين $g(x)=-1$, $f(x)=x^2$ حيث $x\in[0,1]$)

$d(f,g)=|f(a)-g(a)|+\overset{1}{\underset{0}{V}}(f-g)$ حيث $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f-g)$ هو التغير الكلي لفرق الدالتين:

$$d(f,g)=|0+1|+(2-1)=1+1=2$$

ت)- إيجاد الكرة المفتوحة $S(p,r)$: لدينا الفضاء المتري $(\mathbb{R}^2,\rho)$ حيث ρ معرف كالآتي :

$$\rho(p,q)=|x-x_0|+|y-y_0| \qquad ;p(x_0,y_0),q(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

١) الكرة المفتوحة $S(p,r)$: $S(p,r)=\{q\in\mathbb{R}^2:d(p,q)<r\}=$

$$=\{|x-x_0|+|y-y_0|<r \qquad ;(x_0,y_0),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

لإيجاد $s((0,0),r=1)$: $s((0,0),1)=\{|x|+|y|<1 \quad ;(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ ولنناقش الحالات التالية: عندما $|x|\ge 0$ & $|y|\ge 0$ فإن $|x|+|y|=x+y$ وتكون :

$s((0,0),1)=\{x+y<1 \quad ;(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ وهي تمثل كل النقاط (x,y) في المستوي المحدد بالمستقيمين $x=0$ & $y=0$ بحيث $x+y<1$ بالمتابعة بنفس الطريقة نحصل على ثلاث أخرى وعندها الشكل التالي يوضح أن المجموعة $s((0,0),1)$ هي مجموعة كل النقاط التي تقع داخل المربع الذي مركزه نقطة الأصل وطول

ضلعه $\sqrt{2}$ وقطراه منطبقان على المحاور الأحداثية كما بالشكل :

(0,1) (-1,0) (1,0) (0,-1) x y

جواب السؤال الثاني (١٨ درجة) :

١)- لنبين أن كل كرة مغلقة في فضاء خطي منظم $(X,\|*\|)$ تكون مجموعة محدبة .

لتكن $S[x_0,r]$ كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r في الفضاء الخطي المنظم X ولنثبت أن القطعة المستقيمة $z=(1-\alpha)x+\alpha y \quad ; 0\le\alpha\le 1$ بين النقطتين x و y من $S[x_0,r]$ تقع داخل هذه الكرة

بما أن x و y من الكرة $S[x_0,r]$ نجد أن $\|x-x_0\|\le r \quad , \|y-y_0\|\le r$ وأن :

$$\|z-x_0\|=\|(1-\alpha)x+\alpha y-x_0\|=\|(1-\alpha)x+\alpha y-(1-\alpha)x_0-\alpha x_0\|\le$$
$$\|(1-\alpha)(x-x_0)\|+\|\alpha(y-y_0)\|\le(1-\alpha)r+\alpha r$$

وهكذا نرى أن $\|z-x_0\|\le r$ مما يعني أن $z\in S[x_0,r]$ أي المجموعة محدبة .

٢)- هذين الفضاءين هما $AC_0[a,b]$ و $L_1[a,b]$ ولنثبت ذلك . لنضع :

$$\Phi: AC_0[a,b]\longrightarrow L_1[a,b]$$
$$f\mapsto\Phi(f)=\varphi$$

من أجل أي عنصرين f و g من $AC_0[a,b]$ يوجد عنصران مناسبان φ و Ψ من $L_1[a,b]$ بحيث يكون:

$$f(x)=\int_a^x\varphi(t)dt \quad ; \quad g(x)=\int_a^x\psi(t)dt$$

ومن اجل أي عددين λ و μ نجد: $\Phi(\lambda f+\mu g)=\lambda\varphi+\mu\psi=\lambda\Phi(f)+\mu\Phi(g)$

إذن Φ تطبيق خطي كما أن : $f\in AC_0[a,b]$: $\|\Phi(f)\|_{L_1}=\|\varphi\|_{L_1}=\int_a^b|\varphi(t)|dt=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\|f\|_{BV}$

إذن Φ يحافظ على النظيم وبالتالي متباين أيضاً (انظر (٣-٨) الملاحظة (١٠)).

ويكون Φ غامراً أيضاً لأنه من أجل أي عنصر $h(x)$ من $L_1[a,b]$ يكفي أخذ التابع المستمر مطلقاً $F(x)$:

$$F(x)=\int_a^x h(t)dt \quad ; x\in[a,b]$$

فيكون $\overset{b}{\underset{a}{V}}(F)=\int_a^b|h(t)|dt$ كما أن $\Phi(F)=h$.

إذن Φ إيزومورفيزم من $AC_0[a,b]$ على $L_1[a,b]$ وبالتالي هذان الفضاءان إيزومورفيان لبعضهما.

جواب السؤال الثالث (٨+١٢=٢٠ درجة) :

حسب الفرض $A=\{\{x_n\}\in\ell_2: \ x_{2n}=0 \quad ,\forall n\in N\}$ ولنوجد $A^\perp$.

بفرض $S=\{\{x_n\}\in\ell_2 \ : \ x_{2n-1}=0 \ , \forall n\in N\}$ إذا كان $x\in S \ \& \ y\in A$ عندئذٍ

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\bar{y}_n=0$$

وبالتالي $x\in A^\perp$ هذا يؤدي أن $S\subset A^\perp$. وبالعكس بفرض $x\in A^\perp$, $x_{2m-1}\ne 0$ من أجل $m\in\mathbb{N}$. الشعاع $\bar{e}_{2m-1}$ عنصر من قاعدة متعامدة في ℓ_2 إن $e_{2m-1}\in A$ أي أن $\langle x,\bar{e}_{2m-1}\rangle=x_{2m-1}=0$ وهذا يتناقض مع أن $x_{2m-1}\ne 0$ وذلك من أجل كل $m\in\mathbb{N}$ أي أن $x\in S$ وبالتالي $A^\perp\subset S$ وبذلك يتم المطلوب .

18 4 4

ب) (1) $\Leftarrow$ (2): بما أن الجملة $h_1, h_2, \dots\dots$ تامة فإن مساواة بارسيفال محققة وبالتالي فإن المتتالية $\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k\right\}$ ستكون متقاربة من x وبالتالي :، $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k$

(2) $\Leftarrow$ (3): نفترض أن $\langle x, h_k \rangle = 0$ مهما يكن $k = 1,2,3\dots\dots$ فيكون : $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k = \lim \theta = 0$

(3) $\Leftarrow$ (1): نفرض جدلاً أن الجملة $h_1, h_2, \dots\dots$ غير تامة، عندئذٍ يوجد عنصر واحد على الأقل y من H لا تتحقق من أجله مساواة بارسيفال ، أي: $\alpha_k = \langle y, h_k \rangle \;;\; \| y \|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$

وبما أن المتتالية $\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k\right\}$ متتالية كوشي في H لهذا فإنه يوجد عنصر z من H بحيث : $z = \lim \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$ لذلك فإن مساواة بارسيفال محققة أي أن : $\alpha_k = \langle z, h_k \rangle \;;\; \| z \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$

من أجل $k = 1,2,3\dots\dots$ يكون : $\langle y - z, h_k \rangle = \langle y, h_k \rangle - \langle z, h_k \rangle = \alpha_k - \alpha_k = 0$

وهذا يعني أن $y - z = \theta$ وبالتالي فإن $y = z$.

من ناحية ثانية لدينا: $\| y \|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \| z \|^2$

أي أن: $\| y \| > \| z \|$ وهذا غير صحيح طالما $y = z$ إذن الفرض الجدلي خاطئ والجملة $h_1, h_2, \dots$ تامة في H

<u>جواب السؤال الرابع (١٥ درجة):</u>

لنأخذ العنصرين $x_1 = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ و $x_2 = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)$ من الفضاء ℓ_2 عندئذ :

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = A(\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1, \alpha\xi_2 + \beta\zeta_2, \dots) = \left(\frac{\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1}{1}, \frac{\alpha\xi_2 + \beta\zeta_2}{2}, \dots\right) =$$
$$\alpha\left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \dots\right) + \beta\left(\frac{\zeta_1}{1}, \frac{\zeta_2}{2}, \dots\right) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$$

إذن A خطي . ولنبرهن أنه محدود .

$$\|A(x)\|_{\ell_2} = \left\|\left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots\right)\right\|_{\ell_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_i}{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le c\|x\|$$

حيث $x = (\xi_i)$. هذا يعني إن T محدود ، وهنا $C = 1$.

لنوجد $\| A \|$: (1) $\|A(x)\|_{\ell_2} \le \|x\| \Rightarrow \sup_{\substack{x\in\ell_2 \\ x\neq\theta}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \le 1 \Rightarrow \|A\| \le 1$

من جهة أخرى لنأخذ $\sigma = (1,0,0,\dots.)$ من الفضاء ℓ_2 عندئذ $\|\sigma\| = 1$ كما أن : $\|A(\sigma)\| = 1$.

كما أن $\sup_{\substack{x\in\ell_2 \\ x\neq\theta}} \|A(x)\| \ge \sup_{\substack{\sigma\in\ell_2 \\ \|\sigma\|=1}} \|A(\sigma)\| = 1$ أي أن (2) $\|A\| \ge 1$ من (1) و (2) نستنتج أن $\|A\| = 1$

3 وكما هو معلوم من أجل $A^*(y)=(z_i)$; $i=1,2,3,\ldots$ وأن $y=(\eta_i)$ ن أن
فإن الجداء الداخلي في ℓ_2 يعطى بالعلاقة: $x_1=(\xi_1,\xi_2,\ldots)$ و $x_2=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots)$ من الفضاء ℓ_2
$\langle x_1,x_2\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\zeta_i}$. بالتالي يكون: $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{i}\overline{\eta_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{z_i}$

بالمطابقة بين الطرفين نجد: $z_1=\frac{\eta_1}{1}, z_2=\frac{\eta_2}{2},\ldots,z_n=\frac{\eta_n}{n}$ بذلك فإن:

3 $A^*y=(\frac{\eta_1}{1},\frac{\eta_2}{2},\ldots,\frac{\eta_i}{i},\ldots)$. من هذا نستنتج أن $A^*=A$ أي أن المؤثر مترافق ذاتياً.

جواب السؤال الخامس (١٥ درجة): الفضاءالمرافق للفضاء ℓ_1:

3 لنأخذ (e_i) قاعدة شاودر للفضاء ℓ_1 عندئذٍ كل عنصر x من ℓ_1 يكتب بالشكل: $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$

ليكن f دالياً خطياً محدوداً. عندئذٍ:
$$f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i \qquad (1)$$

حيث $f_i=f(e_i)$ تتعرف بشكل وحيد بواسطة الدالي f. ولما كان $\|e_i\|=1$ فإن:

3 $|f_i|=|f(e_i)|\le\|f\|\,\|e_i\|=\|f\|$

أي: $\sup_i|f_i|\le\|f\| \qquad (2)$ فإن $(f_i)\in\ell_\infty$.

من جهة أخرى ومن أجل كل عنصر من ℓ_∞ وليكن $\zeta=(\zeta_i)$ يمكننا إيجاد دالي خطي محدود g على ℓ_1 بحيث يكون: $g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\zeta_i$ حيث $x=(\zeta_i)\in\ell_1$. نلاحظ أن $g\in\ell_1^*$ لأن g خطي ومحدود وأن:

3 $$|g(x)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i.\zeta_i|\le\sup_i\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\|x\|\sup_i|\zeta_i|$$

من العلاقة (1) نجد: $$|f(x)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i.f_i|\le\sup_i\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\|x\|\sup_i|f_i|$$

3 بأخذ $\|x\|=1$ نجد: $\|f\|\le\sup_i|f_i| \qquad (3)$

من المتراجحتين (2) و(3) نستنتج: $\|f\|=\sup_i|f_i|$

وهذا يعني أن نظيم f ليس إلا النظيم على الفضاء ℓ_∞. وبالتالي نجد أن الفضاء المرافق ℓ_1 هو الفضاء ℓ_∞.

3 نعرّف الفضاء $b_a(\mathbb{N})$ بأنه مجموعة كل التوابع: $\mu:P(\mathbb{N})\longrightarrow\mathbb{R}$ المحدودة والجمعية المنتهية مع العمليات الخطية المعروفة. حيث $P(\mathbb{N})$ لمجموعة كل أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.
الفضاء $b_a(\mathbb{N})$ هو الفضاء المرافق للفضاء ℓ_∞ أي $\ell_\infty^*=b_a(\mathbb{N})$، نستنتج أن الفضاء ℓ_∞ ليس انعكاسياً.

مدرسا المقرر
د. سامح العرجة ، د. محمد عامر

انتهت الإجابات

حمص في ٣١ / ١ / ٢٠١٦ م.